PART2 関数方程式

要点整理と公式

要点① $\int_a^b f(t)dt$ を含む等式から関数を求める

等式 $f(x)=\sin x-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求める

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t dt$ は「　　　」であるから，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t dt$ 　　とおくと

$$f(x)=\sin x-k$$

よって

$$k=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-k)\cos t dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t-k\cos t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin 2t}{2}-k\cos t\right)dt$$

$$=\left[-\frac{\cos 2t}{4}-k\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}-k$$

より，$k=\frac{1}{2}-k$ 　　よって $k=\frac{1}{4}$

したがって $f(x)=\sin x-\frac{1}{4}$

要点② $\int_a^x f(t)dt$ を含む等式から関数を求める

等式 $f(x)=\frac{1}{2}x+\int_0^x (t-x)\sin t dt$ ……① を満たす関数 $f(x)$ を求める

$$f(x)=\frac{1}{2}x+\int_0^x t\sin t dt-x\int_0^x \sin t dt$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}+x\sin x-\int_0^x \sin t dt-x\sin x=\frac{1}{2}-[-\cos t]_0^x=\cos x-\frac{1}{2}$$

よって $f(x)=\int\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)dx=\sin x-\frac{1}{2}x+C$ …… ②

①で $x=$　のとき $f(0)=0$

よって，②より $C=0$

したがって $f(x)=\sin x-\frac{1}{2}x$

2 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=2e^x-\int_0^1 f(t)dt$　　(2) $f(x)=\frac{3}{4}x^2+\int_1^x (x-t)\log t\,dt$

Point Pickup

関数方程式

・a，b が定数のとき $\int_a^b f(t)dt$ は定数

・a が定数のとき $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$　　$\int_a^a f(t)dt=0$

を利用し，定積分を含む関数を求める。

第18講 PART2 確認問題

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

ただし，選択肢のあるものはその中から選べ。

1 $f(x)=2+\cos\pi x-\int_0^1 f(t)dt$

$f(x)=$ ア

① $\cos\pi x$　② $1+\cos\pi x$

③ $3+\cos\pi x$　④ $x+\cos\pi x$

2 $f(x)=x^2+\int_1^x (x-t)e^t dt$

$f'(x)$ を求めると，$f'(x)=$ イ

また，$f(1)=$ ウ

よって，$f(x)=$ エ

[イ の選択肢]

① $x+e^x$　② $2x+e^x$

③ $2x+e^x-1$　④ $2x+e^x-e$

[エ の選択肢]

① x^2+e^x　② x^2+ex-e^x

③ x^2-ex+e^x　④ x^2-ex+e^x-1

PART2 関数方程式

2 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=2e^x-\int_0^1 f(t)\,dt$　　(2) $f(x)=\dfrac{3}{4}x^2+\int_1^x (x-t)\log t\,dt$

[解答]

(1) $\int_0^1 f(t)\,dt=k$ とおくと，$f(x)=2e^x-k$

よって $k=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1 (2e^t-k)\,dt=\left[2e^t-kt\right]_0^1=2e-k-2$ より

$k=2e-k-2$　　よって $k=e-1$

したがって $f(x)=2e^x-e+1$

(2) $f(x)=\dfrac{3}{4}x^2+\int_1^x (x-t)\log t\,dt$ ……① より

$$f(x)=\frac{3}{4}x^2+x\int_1^x \log t\,dt-\int_1^x t\log t\,dt$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}x+\int_1^x \log t\,dt+x\log x-x\log x=\frac{3}{2}x+\int_1^x 1\cdot\log t\,dt$$

$$=\frac{3}{2}x+\int_1^x (t)'\log t\,dx$$

$$=\frac{3}{2}x+\left[t\log t\right]_1^x-\int_1^x t\cdot\frac{1}{t}\,dt=\frac{3}{2}x+x\log x-\int_1^x dt$$

$$=\frac{3}{2}x+x\log x-\left[t\right]_1^x=x\log x+\frac{1}{2}x+1$$

よって $f(x)=\int x\log x\,dx+\dfrac{1}{4}x^2+x=\int\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)'\cdot\log x\,dx+\dfrac{1}{4}x^2+x$

$$=\frac{1}{2}x^2\log x-\int\frac{1}{2}x\,dx+\frac{1}{4}x^2+x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x^2+x+C=\frac{1}{2}x^2\log x+x+C \text{ …… ②}$$

①で $x=1$ のとき $f(1)=\dfrac{3}{4}$　　よって②より $1+C=\dfrac{3}{4}$　　$C=-\dfrac{1}{4}$

したがって $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2\log x+x-\dfrac{1}{4}$

第18講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：②

[解説]

$\int_0^1 f(t)dt=k$ とおくと，[A]

$$f(x)=2+\cos\pi x-k$$

よって，

$$k=\int_0^1 f(t)dt$$
$$=\int_0^1 (2+\cos\pi t-k)dt$$
$$=\left[(2-k)t+\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^1$$
$$=2-k$$

よって，$k=2-k$

$$k=1$$

したがって，

$$\boldsymbol{f(x)=1+\cos\pi x}$$

[A]　$\int_0^1 f(t)dt$ は定数だから，1つの文字でおく。

2　**[正解]** イ：④，ウ：1，エ：③

[解説]

$$f(x)=x^2+\int_1^x (x-t)e^t\,dt \quad \cdots\cdots ①$$

より，

$$f(x)=x^2+x\int_1^x e^t\,dt-\int_1^x te^t\,dt \quad \text{[B]}$$

$$f'(x)=2x+1\cdot\int_1^x e^t\,dt+x\cdot e^x-xe^x \quad \text{[C]}$$

$$=2x+\int_1^x e^t\,dt$$

$$=2x+\left[e^t\right]_1^x$$

$$=\mathbf{2x+e^x-e}$$

よって，

$$f(x)=\int\left(2x+e^x-e\right)dx$$

$$=x^2+e^x-ex+C \quad （C\text{ は積分定数}）$$

$$=x^2-ex+e^x+C \quad \cdots\cdots ②$$

①で $x=1$ のとき，$f(1)=\mathbf{1}$ [D]

よって，②より，

$$1+C=1$$

$$C=0$$

したがって，

$$\boldsymbol{f(x)=x^2-ex+e^x}$$

[B]　定積分の中の x は定数とみなして定積分の外に出す。

[C]　$x\int_1^x e^t\,dt$ を x で微分すると，

$$(x)'\cdot\int_1^x e^t\,dt+x\cdot\frac{d}{dx}\int_1^x e^t\,dt$$

$\int_1^x te^t\,dt$ を x で微分すると，

$$\frac{d}{dx}\int_1^x te^t\,dt=xe^x$$

[D]　$\int_1^1 (x-t)e^t\,dt=0$